الخميس 8/10/2015 الدوال ذات التغيرات المحدودة

ندرس في هذا الفصل صنفا مهما من الدوال الحقيقية الدوال ذات التغير المحدود وأول من درسها العالم جوردان ... كبير في تعميم مفهوم التكامل المعرف لريمان وتعميمه تكامل ستيلتجس ولبيج كما أن تطبيقاتها كثيرة ومتنوعة في نظرية التقريب.
نظرية الاحتمالات ـ متسلسلات فورييه.
كما سندرس بعض أنواع الدوال وخاصية الاتصال في هذا الفصل وأهمها الدوال المطردة التي سنبدأ بها.

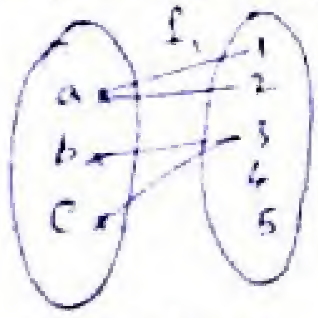
الدوال المطردة:

سنعرف الدوال التي نتعامل معها في هذا المقرر على فترات من الشكل:

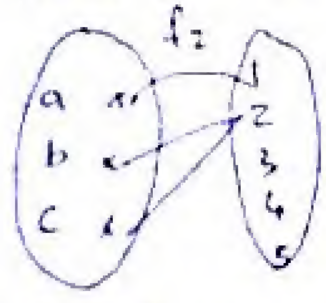
$I = [a, b]$, $I =]-\infty, +\infty[$; $-\infty < a < b < \infty$

$I = [a, \infty[$, $I =]-\infty, 0]$

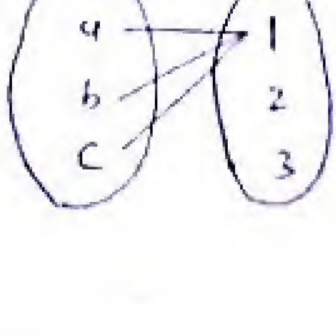
$[a, b]$ مجموعة جزئية من R لأننا سنعرف $I \subseteq]-\infty, \infty[= R$
[illegible] (مجموعات مترابطة) [illegible].



هذه علاقة



علاقة وتطبيق ودالة غير عددية نسميه غير معرفة على R .



الدالة العددية:

لتكن X, Y مجموعتان $\neq \emptyset$ وعدديتان من R شريحتا الأعداد الحقيقية من المجموعة بعدد

حيث $X \subseteq R$

$Y \subseteq R$

نسمي كل تطبيق من المجموعة العددية المنطلق إلى المجموعة العددية حيث يرفق كل عنصر من X بعنصر وحيد $y \in Y$ ونكتب $f: X \longrightarrow Y$

حيث: $x \longmapsto y = f(x)$

نسمي X (المنطلق) مجموعة تعريف هذه الدالة أو منطلقها، و Y مجموعة قيم هذه الدالة أو مستقرها. وليس من الضروري أن يكون المستقر الفعلي هو المستقر الفعلي.

ونسمي العلاقة $y = f(x)$ بقاعدة الربط بين x, y.

مثال:

الدالة الخطية $f(x) = 3x + 1$ مجموعة تعريفها $D(f) = R$

ومستقرها الفعلي أي المدى: $R(f) = R =]-\infty, \infty[$

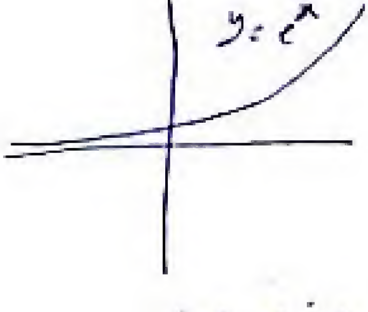
هنا المستقر = الفعلي.

$$f: R \longrightarrow R$$
$$; \quad x \longmapsto y = f(x) = 3x + 1.$$

وكذلك الدالة $y = e^x$

$$D(f) = R \quad , \quad R(f) =]0, \infty[.$$

وتسمى الدالة الأسية.



المستقر الفعلي: $e^x : R \to R$

$$\infty > e^x > 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \quad , \quad \lim_{x \to \infty} e^x = \infty$$

وكثير من الدوال مثل: $\cos, \sin, [x], \arcsin,$
$\arctan, ch, x^2, \ldots$

الدالة العددية المعرفة:

لتكن الدالة f معرفة بالشكل: $f: I \longrightarrow Y$

حيث I أي مجموعة (مفتوحة، مغلقة، نصف مغلقة)

$N = I = \{1, 2, \dots\}$.

يقال عن هذه الدالة أيضاً محدودة على I مجموعة تعريفها اذا كان:

$|f(x)| \le \underset{\text{عدد حقيقي موجب}}{k}$; $x \in I$

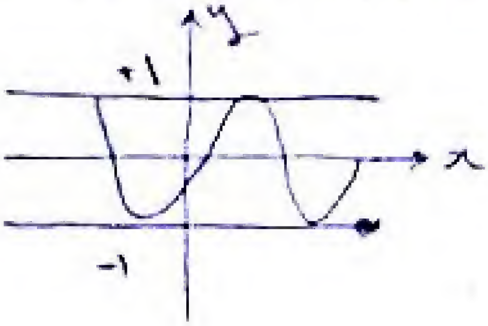
أي تكون مجموعة قيمها Y مجموعة محدودة أي محدودة

من الأعلى ومن الأدنى أي.

$\underset{\text{عدد ثابت}}{\alpha} \le f(x) \le \underset{\text{عدد ثابت}}{\beta}$; $x \in I$.

مثال:

الدالة $f(x) = \sin x$ $\quad D(f) = R$, $R(f) = [-1, +1]$



$\sin : R \longrightarrow [-1, 1]$

; $x \longmapsto y = \sin x$.

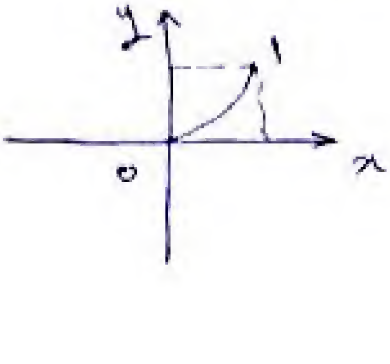
$-1 \le \sin x \le 1$; $x \in R$.

أي: $(|\sin x| \le 1)$.

وكذلك الدالة $g(x) = x^2$,

$g : [0,1] \longrightarrow [0, 1]$

$x \longmapsto y = g(x) = x^2$



حيث: $D(g) = [0,1]$

$R(g) = [0,1]$

بينما الدالة $y = f(x) = e^x$ المعرفة على R ليست محدودة.

لأن مجموعة قيمها المقابلة ليست محدودة.

$D(R) =]0, \infty[\longrightarrow 0 < e^x < \infty$

وهذه الدالة محدودة من الأدنى بالعدد 0 وليست محدودة من الأعلى. حيث:
ولا تنتهي

$\inf_{x\in R} e^{x} = 0 \notin \,]0, \infty[$

$\sup_{x\in R} e^{x} = \infty \rightarrow$ مصطلح وليس عدد $\ni R$

الدالة المتزايدة (المتزايدة تماماً):

لتكن الدالة $f : I \longrightarrow R$ حيث I فترة (مجموعة) يقال عن هذه الدالة أنها متزايدة (متزايدة تماماً) على I اذا تحقق:

$\forall x_1, x_2 \in I \;;\; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$

$\{ f(x_1) < f(x_2) \}$ اذا تماماً .

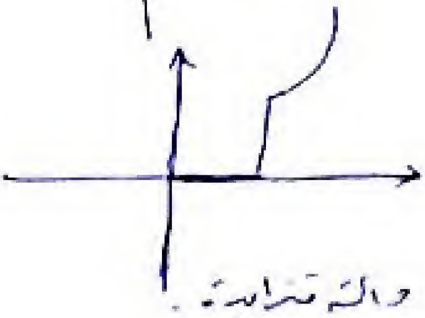
مثال:

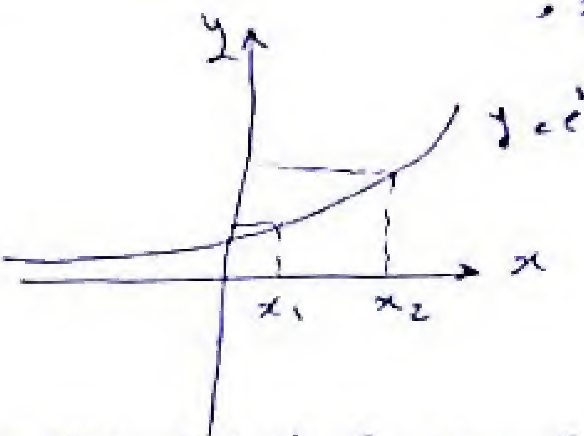
$y = e^{x}$ متزايدة تماماً على $D(f) = R$

نثبت:

$\forall x_1, x_2 \in R \;;\; x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2}$

$; x \in R$





أما الدالة $f(x) = [x]$ التي تسمى الدالة الدرجية متزايدة على R .

(الدالة أكبر عدد صحيح) .

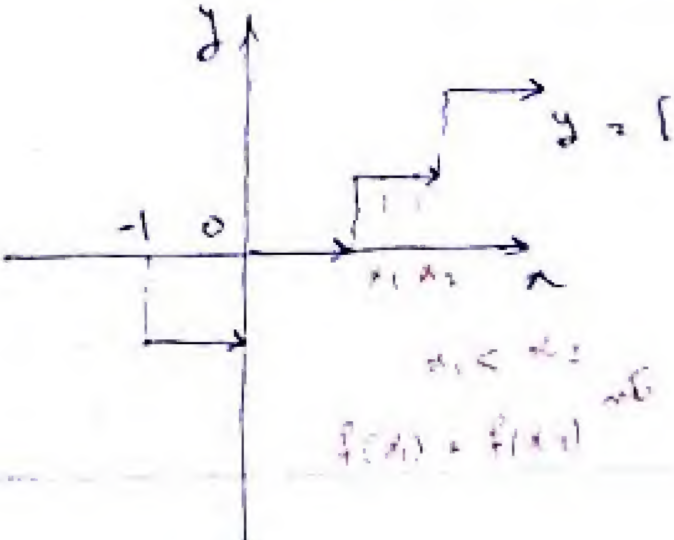
مجموعة الـ R و Z

قيمها الصحيحة Z

رمزها $[x]$ مثلاً

$[\frac{1}{2}] = 0 \;,\; [\pi] = 3$

$[-1] = -1 \,,\, [0] = 0$

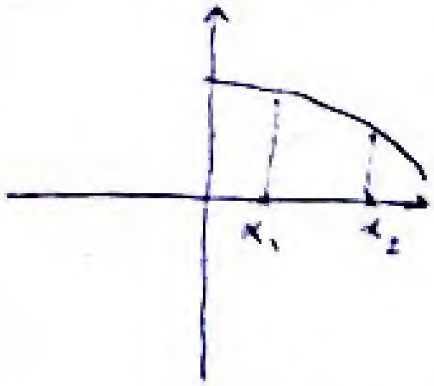


الدالة المتناقصة (متناقصة تماما):

نقول أن الدالة متناقصة (متناقصة تماما) على I إذا تحقق:

$\forall x_1, x_2 \in I \; ; \; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ ②

$\{ f(x_1) > f(x_2) \}$



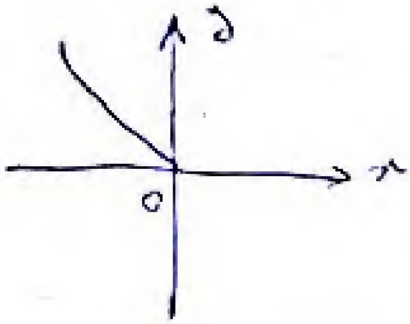
ملاحظة مهمة:

$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

مثال:

الدالة $f(x) = x^2$ المتناقصة تماما على المجال $]-\infty, 0]$

وهي متزايدة تماما على المجال $[0, +\infty[$.



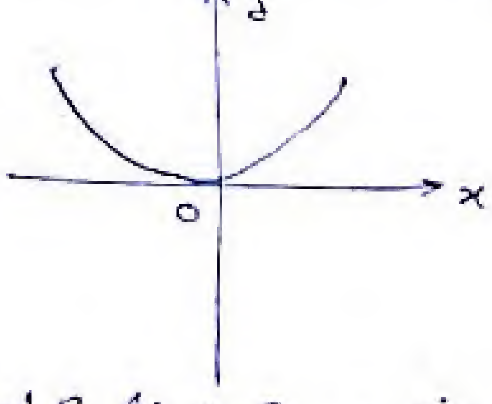
نسمي أي دالة من النوعين السابقين على I

دالة مطردة.

مثال:

الدالة $f(x) = x^2$ (ذات الأساس) ليست

مطردة على R كما يوضح خطها البياني:



ومن الدوال اللامطردة دالتا sin , cos على R ليستا مطردة إلا

على فترات مثل $[0, \frac{\pi}{2}]$ تزايدية.